6)

CENNI ELEMENTARI

SUI DISCRIMINANTI, INVARIANTI E COVARIANTI

NOTA

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

Membro effettivo dell' i. r. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti

(Estr. dal Vol. IV, Serie III, degli Atti dell' Istituto stesso.)

---

1. ***Determinante*** o ***discriminante***. Se da una funzione algebrica-razionale-intera altre se ne deducono mediante *sostituzioni lineari* (vale a dire sostituendo alle indeterminate x, y, ecc. altrettante funzioni $\alpha\xi+\beta\eta+\ldots$, ecc. delle nuove indeterminate, ξ, η, ecc.), tutte queste funzioni hanno alcuni caratteri comuni di famiglia, che le distinguono dalle funzioni, che in simil modo possono dedursi da altra funzione, che sia essenzialmente da loro differente: lo studio di questi caretteri è il principal oggetto della presente Nota. — Prendiamo da prima a considerare l' equazione

$$(1)\quad u_n=ax^n+nbx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}cx^{n-2}\ldots+ngx+h=0$$

le differenze tra le sue radici sono evidentemente uguali a quelle della sua trasformata in ξ ottenuta ponendo $x=\xi+\beta$; perciò la funzione simmetrica Π^2 (Veggansi i §§ 7, 46 della Sposizione della teorica dei determinanti nel Vol. VII delle Memorie dell' I. R. Istituto) che è il prodotto dei quadrati delle differenze delle radici, e che è

esprimibile razionalmente col mezzo dei coefficienti della (1), (con altre parole essa è l' ultimo termine della famosa trasformata ai quadrati delle differenze delle radici), conserva lo stesso valore se a tali coefficienti dell' equazione in x si sostituiscono quelli della trasformata in ξ. Siccome la Π^2 si annulla ogni qualvolta la (1) abbia radici eguali, così essa si otterrà eliminando la x tra la (1) e la sua derivata

$$(2) \qquad ax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} \ldots + g = 0 \,,$$

ossia tra la (2) e la

$$(3) \qquad bx^{n-1} + (n-1)cx^{n-2} \ldots + (n-1)gx + h = 0 \,,$$

che nasce sottraendo dalla (1) la (2) moltiplicata per x. La funzione risultante da tale eliminazione può calcolarsi in differenti maniere, ed è espressa molto semplicemente da un determinante, i cui termini sono i coefficienti delle (2) (3) (Veggasi il § 88 della citata Sposizione); perciò la Π^2 non differirà se non che per un moltiplicatore costante dalle funzioni che per $n=2,\ 3,\ 4$ sono

$$D_2 = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

$$D_3 = -\begin{vmatrix} a, & 2b, & c, & \\ & a, & 2b, & c \\ b, & 2c, & d, & \\ & b, & 2c, & d \end{vmatrix} = -a^2d^2 + 6abcd - 4b^3d - 4ac^3 + 3b^2c^2$$

$$\begin{aligned} D_4 = {} & a^3e^3 - 12a^2bde^2 - 18a^2c^2e^2 + 54ab^2ce^2 - 27b^4e^2 + \\ & + 54a^2cd^2e - 6ab^2d^2e - 180abc^2de + 108b^3cde + 81ac^4e - \\ & - 54b^2c^3e - 27a^2d^4 + 108abcd^3 - 64b^3d^3 - 54ac^3d^2 + 36b^2c^2d^2 . \end{aligned}$$

Nei §§ 5, 9, 17 daremo espressioni più comode di questi D_3, D_4.

A queste funzioni D_n fu dato dal Gauss il nome di *determinanti*, che ben esprimeva il loro ufficio di determinare la famiglia a cui appartiene la (1) e tutte le sue trasformate: poscia alla parola *determinante* fu data maggior estensione di significato, e la D_n si disse il *discriminante* della (1). — Per determinare il rapporto che passa tra la Π^2 e la D_n ci basterà considerare l'equazione binomia $a\,x^n + h = 0$, nella quale le somme delle potenze delle radici sono

$$s_0 = n \quad , \; s_1 = s_2 \ldots = s_{n-1} = 0 \, , \quad s_n = -n\frac{h}{a} \quad ,$$

sicchè risulta dal citato § 16 che

$$\Pi^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} s_0 s_n{}^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n \left(\frac{h}{a}\right)^{n-1} .$$

Viene da ciò che nei predetti casi di $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$

si ha $\Pi^2 = -\frac{4}{a} c + \text{ec.} = -\frac{4}{a^2} D_2$

$$\Pi^2 = -\frac{27}{a^2} d^2 + \text{ec.} = \frac{27}{a^4} D_3$$

$$\Pi^2 = \frac{256}{a^3} e^3 - \text{ec.} = \frac{256}{a^6} \; {}_4 .$$

2. *Invarianti.* Si dice *invariante* della (1) ogni funzione intera-omogenea dei suoi coefficienti $a, b, \ldots . g, h$, la quale non cangi quando essi si mutano nei loro corrispondenti $h, g, \ldots . b, a$, e che accresca nel rapporto di 1 ad α^u quando ad essi si sostituiscono i coefficienti delle potenze di ξ nello sviluppo di

$$a(\alpha\xi + \beta)^n + nb(\alpha\xi + \beta)^{n-1} + \ldots + h \quad ;$$

per la prima proprietà diremo che l'invariante è dotato di *euritmia*, e per la seconda chiameremo *indice* dell'invariante l'esponente μ. Gli invarianti possono essere di differenti *gradi* rispetto ai coefficienti $a, b, \ldots h$. Noi segneremo con $\mathfrak{J}^{(p)}(u_n)$ o più semplicemente con $J_n^{(p)}$ l'invariante della (1) che è del grado p... Anche il discriminante si segnerà con $\mathfrak{D}(u_n)$ o con D_n. Non è difficile riconoscere che il discriminante D_n è l'invariante del grado $2(n-1)$; giacchè a motivo dell'euritmia del complesso delle (2) (3) è euritmico anche il determinante (§ 1), che è l'espressione del discriminante: mutando $a, b \ldots h$ nei $a\alpha^n$, $b\alpha^{n-1}, \ldots h$ il discriminante diviene $\alpha^{n(n-1)} D_n$, dunque $n(n-1)$ è il suo indice.

3. *L'indice μ di un invariante $\mathfrak{J}^{(p)}(u_n)$ è la metà del prodotto del grado* p *dell'invariante pel grado* n *della u_n.* (Si noti che questo grado n, che forse meglio direbbesi *ordine*, è relativo all'indeterminata x non già ai coefficienti $a, b \ldots$). Infatti, se un termine dell'invariante sia il prodotto di p fra le quantità $a, b, \ldots$ le quali nella u_n sieno coefficienti di x^i, $x^{i'}, \ldots$ sarà $\mu = i + i' +$ ecc.; per l'euritmia l'invariante conterrà inoltre un termine coi coefficienti di x^{n-i}, $x^{n-i'}$, ec., perciò dev'essere anche

$$\mu = n - i + n - i' + \text{ec.} = np - i - i' - \text{ec.} \quad ,$$

quindi
$$\mu = i + i' + \text{ec.} = \frac{np}{2} \, .$$

L'osservazione ora fatta permette di scrivere tutti i termini di un'invariante. Prendiamo per esempio il caso di $n = 3$; il grado dell'invariante non potrà esser dispari, perchè μ riuscirebbe frazionario; poniamo $p = 4$, sarà $\mu = 6$; la partizione del numero $6 = i + i' + \ldots$ in

quattro numeri che non superino $n = 3$ si può fare nei cinque modi

$$3+3+0+0\,,\quad 3+2+1+0\,,\quad 3+1+1+1\,,$$
$$2+2+2+0\,,\quad 2+2+1+1\,,$$

quindi l'invariante $J_3^{(4)}$ conterrà i termini

$$aadd,\ abcd,\ accc,\ bbbd,\ bbcc$$

formati dai coefficienti delle potenze della x, i cui esponenti sono i numeri predetti, sicchè a corrisponde al numero 3, b al 2, c all'1, e d allo 0.

4. *Modo di calcolare i coefficienti degli invarianti.* Rimane da determinare i coefficienti numerici dei termini trovati come ora si disse; nel caso presente scriveremo

$$J_3^{(4)} = A\,a^2d^2 + Babcd + C\,(ac^3 + b^3d) + D\,b^2c^2$$

avendo, in grazia dell'euritmia, dato lo stesso coefficiente C ai due termini ac^3 b^3d, perchè l'uno si cangia nell'altro permutando tra loro i coefficienti primo ed ultimo, ed il secondo e penultimo. Ora se nella

$$u_3 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$$

che diremo la *forma cubica* poniamo $x = \xi + \beta$, dove possiamo supporre che β sia infinitesima, la *forma* diventa

$$a\xi^3 + 3\,(a\beta + b)\,\xi^2 + 3\,(2\,b\beta + c)\,\xi + (3c\beta + d)$$

sicchè i coefficienti b, c, d ricevono gli accrescimenti infinitesimi $a\beta$, $2b\beta$, $3c\beta$, e quindi $J_3^{(4)}$ riceverà l'accrescimento

$$\beta\,(6\,Aa^2cd + Baacd + 2Babbd + 3Babcc + 6\,Cabc^2 +$$
$$+ 3\,Cab^2d + 3\,Cb^3c + 2Dabc^2 + 4\,Db^2bc)$$

che dovendo essere identicamente nullo, darà

$$B = -6A\,,\quad C = 4A\,,\quad D = -3A\,,\qquad \text{ed infatti}$$

$$-a^2d^2 + 6abcd - 4(ac^3 + b^3d) + 3b^2c^2 = D_3$$

è *invariante* essendo il discriminante già trovato al § 1.

Cerchiamo per secondo esempio se la forma cubica ammetta un' invariante di 2.° grado; il suo indice sarebbe $\mu = \frac{3.2}{2} = 3$ e le spartizioni $3+0$, $2+1$ darebbero due soli termini, cioè l'invariante dovrebbe essere $Aad + Bbc$, il quale riferito alla forma in ξ riceve l'accrescimento $\beta(3Aac + Bac + 2Bbb)$, che non si può rendere identicamente nullo; dunque la forma cubica non ha alcun invariante di grado inferiore al discriminante D_3. L' operazione colla quale dalla formula assunta per invariante si passa alla formula, che dee porsi $= 0$, può dirsi *derivazione rispetto agli indici*, intendendo che gli indici di $a, b, c\ldots$ sieno rispettivamente $0, 1, 2\ldots$: tale derivazione la segneremo con Δ, vale a dire, ammetteremo che $\Delta a = 0$, $\Delta b = a$, $\Delta c = 2b$, ec., sicchè per trovare i coefficienti numerici dell'invariante $J_n^{(p)}$ si avrà

$$\Delta J_n^{(p)} = (a\mathrm{D}_b + 2b\mathrm{D}_c + 3c\mathrm{D}_d \ldots .)\, J_n^{(p)} = 0\,,$$

dove la caratteristica D indica al solito la derivata rispetto alla variabile posta abbasso, e s'intende che a ciascuna caratteristica sia posposta la $J_n^{(p)}$. A motivo dell' euritmia potrebbe egualmente servire la derivazione rispetto agli indici indicata da $\nabla = nb\mathrm{D}_a + (n-1)c\mathrm{D}_b \ldots + h\mathrm{D}_g$ considerando come indice di ciascun coefficiente l'esponente della x; ma ci riuscirà più comodo ammettere ormai che gli indici di $a, b, c, \ldots h$ sieno sempre $0, 1, \ldots n$.

5. Passiamo alla forma *biquadratica*

$$u_4 = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e\,;$$

l'invariante di 1.° grado e di indice $\mu=2$ non potrebbe contenere che il termine c, che non è invariabile.

Pel grado $p=2$ ed indice $\mu=\frac{4.2}{2}=4$ abbiamo le spartizioni $4+0$, $3+1$, $2+2$, cui corrispondono i termini ae, bd, c^2 e la *derivazione rispetto agli indici*

$$\Delta J_4^{(2)} = \Delta(Aae + Bbd + Cc^2) = 4Bad + Bad + 3Bbc + 4Cbc = 0$$

dà $B=-4A$, $4C=-3B$ avremo quindi l'invariante

$$J_4^{(2)} = ae - 4bd + 3c^2 = I$$

che pel frequente uso suol disegnarsi colla semplice lettera I, noi lo diremo il *primo invariante* della forma biquadratica; il *secondo invariante* è di 3.° grado e di indice $\mu=6$, ed è

$$J_4^{(3)} = ace - (b^2e + ad^2) + 2bcd - c^3 = J,$$

giacchè $\Delta J = 2abe + 4acd - 2abe - 4b^2d - 6acd +$

$$+ 2acd + 4bbd + 6bcc - 6bc^2 = 0\,;$$

questo invariante può esprimersi col determinante simmetrico

$$J = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} .$$

La forma biquadratica ammette anche un invariante di 4.° ed uno di 5.° grado, ma essi non sono altro che

$$J_4^{(4)} = I^2 \quad J_4^{(5)} = IJ\,;$$

ed anche il discriminante è funzione intera dei due predetti invarianti fondamentali I, J, essendo

$$D_4 = I^3 - 27 J^2$$

6. La forma di 5.° grado $u_5 = a x^5 + 5bx^4 +$ ecc. non ammette invariante di 2.° grado, il quale dovrebbe avere l'indice $\mu = 5$, e dovrebbe essere $Aaf + Bbe + Ccd$ la cui derivata rispetto agli indici è

$$5Aae + Bae + 4Bbd + 2Cbd + 3Cc^2$$

che non può annullarsi. Vi è poi l'invariante di 4.° grado

$$J_5^{(4)} = a^2 f^2 - 10abef + 4acdf + 16b^2df - 12bc^2f + \\ + 16ace^2 + 9b^2e^2 - 12ad^2e - 76bcde + 48c^3e + 48bd^3 - 32c^2d^2.$$

Per gli altri veggasi una Nota di F. Faà di Bruno negli Annali 1856, pag. 86.

7. La forma di 6.° grado ha l'invariante

$$J_6^{(2)} = ag - 6bf + 15ce - 10d^2 ;$$

e l'altro espresso da un determinante simmetrico

$$J_6^{(4)} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{vmatrix} = aceg - b^2eg - ad^2g + 2bcdg - c^3g - \\ - acf^2 + b^2f^2 + 2adef - 2bcef - 2bd^2f + \\ + 2c^2df - ae^3 + 2bde^2 + c^2e^2 - 3cd^2e + d^4.$$

8. A verificazione dei trovati coefficienti giova osservare che: *In ogni invariante la somma dei coefficienti numerici è nulla*; infatti se sieno uguali tutti i $a, b, \ldots h$ della data forma u_n, posto $x = \xi - 1$ si avrà la trasformata $a\xi^n$, per la quale è evidente che ogni invariante

è nullo. Darà una maggior verificazione l'osservare che se $a = b = \ldots = g$ la trasformata è $a\xi^n + h - a$, e che perciò *ogni invariante prende due valori eguali ponendovi* $a = b = \ldots = g$, *oppure* $b = c = \ldots = g = 0$ *e mutando* h *in* $h - a$. Così, per esempio, il discriminante D_3 dà i due valori eguali $-a^2d^2 + 2a^3d - a^4 = -a^2(d-a)^2$.

9. *Funzioni invarianti non euritmiche. Peninvarianti.* Meritano esser osservate anche le funzioni dei coefficienti della forma u_n di un grado qual si voglia, le quali rimangono invariate da essa alla trasformata in $\xi = x - \beta$, quantunque cessino d' essere *euritmiche*, vale a dire non contengano nello stesso modo il primo e l' ultimo termine della forma u_n; il secondo ed il penultimo, ecc. Con tali funzioni è formata l'equazione ai quadrati delle differenze ed ogni altra equazione, che non cangia quando nella proposta si eseguisce la trasformazione $x = \xi + \beta$. Queste formule si calcolano ricordando che le loro derivate rispetto agli indici (§ 4) devono essere nulle; sussistono pure le relazioni notate al § 8: noi le abbiamo in parte già trovate, e continueremo ad indicarle cogli stessi segni, quantunque ora poniamo $a = 1$; giacchè si potrebbero moltiplicare per qualunque potenza della a, quindi nulla si bada al loro grado. Per l' indice $\mu = 2$ abbiamo il discriminante (§ 1)

$$c - b^2 = D_2 = v_3^{(2,2)} = v_4^{(2,4)} = P_2 ; \tag{2}$$

il significato delle v lo spiegheremo al § 15. Per l' indice 3 abbiamo la nuova formula

$$d - 3bc + 2b^3 = v_3^{(3,3)} = v_3^{(1,6)} = P_3 . \tag{3}$$

Quando l' indice è 4 si ha il primo invariante della forma biquadratica (§ 5) ed il quadrato della predetta (2), cioè

$$\left\{\begin{array}{l} e - 4bd + 3c^2 = I \\ c^2 - 2b^2c + b^4 = v_3^{(1,4)} = P^2_2 \end{array}\right. \tag{4}$$

ed inoltre qualunque formula che risulti linearmente da queste due, qual sarebbe per esempio

$$e - 4bd + 6b^2c - 3b^4 = I - 3P^2_2 = P_4$$

Anche per l'indice 5 si hanno due sole formule essenzialmente diverse, l' una nasce dal prodotto della (2) per la (3), l' altra è nuova e la segneremo con P_5.

$$(5)\quad \begin{cases} f - 5be + 10b^2d - 10b^3c + 4b^5 = P_5 \\ cd - b^2d - 3bc^2 + 5b^3c - 2b^5 = P_2P_3 \end{cases}$$

Per l'indice 6 oltre le formule che risultano dal prodotto delle predette si ha la nuova P_6

$$(6)\quad \begin{cases} g - 6bf + 15b^2e - 20b^3d + 15b^4c - 5b^6 = P_6 \\ ce - b^2e - 4bcd + 4b^3d + 6b^2c^2 - 9b^4c + 3b^6 = P_2P_4 \\ d^2 - 6bcd + 4b^3d + 9b^2c^2 - 12b^4c + 4b^6 = P^2_3 \\ c^3 - 3b^2c^2 + 3b^4c - b^6 = P^3_2 \end{cases}$$

ogni altra funzione dell' indice 6 risulterà linearmente dalle predette, così si trova che il secondo invariante J, l'altro invariante trovato al § 7, ed il discriminante D^3 sono espressi da

$$J = P_2P_4 - P^2_3 - P^3_2\,,\quad J^{(2)}_6 = P_6 + 15P_2P_4 - 10P^2_3\,,$$
$$-D_3 = P^2_3 + 4P^3_2$$

rimettendo la a è

$$-D_3 = \left(ad - 3bc + 2\frac{b^3}{a}\right)^2 + 4a\left(c - \frac{b^2}{a}\right)^3$$

sicchè il discriminante D_3, non meno del D_4 (§ 5), è la somma di un cubo e di un quadrato. — Le funzioni P_2,

P_3, P_4, ecc. (i cui coefficienti sono quelli del binomio newtoniano) meritano particolare osservazione, esse sono i coefficienti dell' equazione

$$\xi^n + \frac{n(n-1)}{2} P_2 \xi^{n-2} \ldots + P_n = 0$$

che è la proposta $x^n + nbx^{n-1} \ldots + h = 0$ liberata dal secondo termine: io proporrei di dirle *peninvarianti fondamentali*, chiamando *peninvarianti* tutte le loro funzioni intere. I peninvarianti d' indice 7 sono i quattro

$$(7) \qquad P_7,\ P_2 P_5,\ P_3 P_4,\ P^2_2 P_3$$

e tutti quelli che da essi dipendono linearmente.

Così pure (8) P_8, $P_2 P_6$, $P_3 P_5$, P^2_4, $P^2_2 P_4$, $P_2 P^2_3$, P^4_2.

Per l' indice $\mu = 9$ si hanno 8 di questi peninvarianti, per $\mu = 10$ sono 12, per $\mu = 11$ sono 14, per $\mu = 12$ sono 21, ecc. È facilissimo esprimere un qualunque peninvariante col mezzo dei peninvarianti fondamentali, bastando ricordare che questi sono i coefficienti della trasformata liberata dal secondo termine; così si ha il discriminante

$$D_4 = P^3_4 - 18 P^2_2 P^2_4 + 54 P_2 P^2_3 P_4 + 81 P^4_2 P_4 - 27 P^4_3 - 54 P^3_2 P^2_3$$

qual risulta ponendo $b = 0$ nella formula del § 1.

10. *Invarianti nelle trasformate e nelle ridotte.* Gli invarianti sono caratteri distintivi delle varie forme e possono servire a riconoscerle per quanto sieno state trasformate mediante la sostituzione $x = \xi + \beta$ oppure la $x = \frac{1}{y}$; sicchè se, per esempio, si formino le successive trasformate, che servono a sviluppare una radice in frazione

continua, gli invarianti di un' equazione potranno servire di conferma di avere ben calcolato: per le equazioni cubiche abbiamo il solo discriminante D_3, e per le biquadratiche abbiamo i due invarianti I, J. Quando la risoluzione di un' equazione generale si riduce, mediante le estrazioni di radice, ad un'altra equazione, i coefficienti di questa *ridotta* o *risolvente* possono esprimersi col mezzo degli invarianti dell' equazione primitiva, e se si giunga ad un' equazione di secondo grado, il discriminante di questa non differirà (eccettochè per un moltiplicatore numerico) da quello della primitiva, giacchè per quanto riportai nella Nota sulla risoluzione algebrica delle equazioni, la sola funzione simmetrica, di cui si possa estrarre una radice (che non sia funzione simmetrica) è la Π^2, cioè il discriminante. Parleremo al § 17 della risoluzione delle equazioni di 5.° grado.

11. L' equazione biquadratica

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

che ha gli invarianti I, J ed il discriminante $D_4 = I^3 - 27J^2$ può risolversi mediante parecchie equazioni cubiche, le quali tutte si riducono alla

$$w^3 - Iw + 2J = 0,$$

il cui discriminante $-4J^2 + \frac{4}{27}I^3$ non differisce dal precedente che per un moltiplicatore numerico positivo; la *ridotta* della equazione cubica è la

$$z^2 + 2Jz + \frac{1}{27}I^3 = 0$$

che ha il medesimo discriminante $\frac{1}{27}I^3 - J^2$. Supposto che tutti i coefficienti sieno reali, *se il discriminante è positivo le radici dell' equazione biquadratica sono tutte reali o tutte immaginarie, quelle della cubica sono tutte reali, e quelle della quadratica immaginarie ; se il discriminante è negativo due radici della biquadratica e due della cubica sono immaginarie e le altre sono reali.* Una radice della risolvente cubica serve a decomporre la biquadratica in due fattori quadratici, giacchè il suo primo membro si riduce a $\frac{1}{a}(ax^2 + 2bx + c + w)^2$ meno un altro quadrato perfetto (Veggasi il § 87 della mia Memoria inserita nel Vol. III dell' Istituto Veneto). I tre valori di w possono esprimersi mediante le radici della primitiva, essendo

$$\frac{6}{a}w' = (x' - x'')(x^{\text{iv}} - x''') + (x' - x''')(x^{\text{iv}} - x'') ;$$

gli altri due valori si ottengono sostituendo alla x' ciascuna delle x'', x''' e lasciando fissa la x^{iv}. Se poniamo $v = \frac{16}{a^2}(b^2 - ac) + \frac{8}{a}w$ avremo un'altra equazione *ridotta* in v, le cui radici saranno espresse da $v' = (x' + x^{\text{iv}} - x'' - x''')^2$, ec.; dal che poi risulta che ciascuna x è data mediante la formula

$$x - \frac{b}{a} = \frac{1}{4}(\pm\sqrt{v'} \pm \sqrt{v''} \pm \sqrt{v'''}) .$$

Un'altra ridotta si trova ponendo $u' = x'x^{\text{iv}} + x''x'''$, ed essa pure dipende da quella in w col mezzo di $u = \frac{2c + 2w}{a}$.

Ciascuna delle w, v, u non cangia valore pel *complesso di sostituzioni* $((x'x''))$, $((x'x'')(x'''x''))$. (Veggasi il § x della Nota alla precitata Sposizione); è questa la ragione per la quale ciascuna di esse ammette tre soli valori. — Se l'equazione biquadratica abbia il primo invariante I nullo, la sua ridotta $w^3 + 2J = 0$ sarà binomia, ed il loro discriminante sarà un quadrato negativo $-J^2$. Siccome mediante equazioni di 2.° grado ogni equazione cubica può ridursi binomia, così poteva prevedersi che collo stesso mezzo ogni equazione biquadratica possa ridursi ad un'altra avente il primo invariante nullo, la quale liberata dal secondo termine ha la forma

$$ax^4 + 6cx^2 + 4dx^1 - \frac{3c^2}{a} = 0 .$$

L'argomento ora accennato può vedersi trattato dettagliatamente nella memoria del prof. Tortolini inserita nel fascicolo 5.° 1858 degli Annali di Matematica.

12. *Forme binarie.* Le forme sogliono il più spesso farsi omogenee rispetto alle indeterminate x, y, cioè si scrive

$$(I) \qquad ax^n + nbx^{n-1}y \ldots + hy^n ;$$

per la stabilità euritmia degli invarianti è evidente che quanto dicemmo rispetto alla x può ripetersi per la y; così rispetto alla trasformata che si ottiene ponendo $x = \alpha'\xi + \beta'y$ gli invarianti, che hanno l'indice μ cresceranno nel rapporto di 1 a α'^{μ}; e rispetto alla nuova trasformata, che si ha ponendo $y = \gamma\xi + \delta\eta$ gli invarianti cresceranno ancora nel rapporto di 1 a δ^{μ}. Ora l'effetto di queste due successive sostituzioni è lo stesso come quello delle due sostituzioni simultanee

$$x = \alpha\xi + \beta\eta , \quad y = \gamma\xi + \delta\eta$$

purchè sia $\alpha = \alpha' + \beta'\gamma$, $\beta = \beta'\delta$, da cui $\beta' = \frac{\beta}{\delta}$, $\alpha' = \alpha - \frac{\beta\gamma}{\delta}$ e $\alpha'\delta = \alpha\delta - \beta\gamma$. Quindi possiamo definire ogni *invariante d'indice* μ *per una funzione omogenea intera dei coefficienti della* (1), *la quale cresce nel rapporto di* 1 *a* $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^{\mu} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{\mu}$ *quando vi si sostituiscono i coefficienti della trasformata in* ξ, η *ottenuta mediante le sostituzioni*

$$x = \alpha\xi + \beta\eta\,, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta\,.$$

13. Per calcolare queste trasformate credo utile adoperare un *algoritmo* conforme a quello che serve per la risoluzione delle equazioni. Si debbano eseguire le sostituzioni

$$x = \alpha\xi + \beta\eta = \xi + 2\eta\,, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta = 2\xi + 3\eta$$

io le riduco come sopra alle due successive

$$x = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\xi + \beta y}{\delta} = \frac{-\xi + 2y}{3}\,,\ y = \gamma\xi + \delta\eta = 2\xi + 3\eta$$

per facilitare la prima sostituzione pongo da prima

$x = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta}\xi = -\frac{\xi}{3}$ e ad evitare le frazioni moltiplico la formula per $\delta^n = 3^n$, poscia eseguisco nel solito modo la sostituzione $\xi + \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \xi - 2$; dopo ciò rovescio l' ordine dei termini e vi eseguisco la sostituzione $y = y' + \gamma = y' + 2$, finalmente muto y' in $\delta\eta = 3\eta$ e nello stesso tempo divido la formula per $\delta^n = 3^n$. Eccone l' applicazione alla forma biquadratica

$$x^4 + 4x^3y - 12x^2y^2 + 8xy^3 - 4y^4$$

ponendo $x = -\frac{\xi}{3}$ e moltiplicando per 3^4 i coefficienti divengono

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - 12 - 108 - 216 - 324 \\
\hline
-2 & 1 - 14 - 80 - 56 - 212 \\
 & 1 - 16 - 48 + 40 \\
 & 1 - 18 - 12 \\
 & 1 - 20
\end{array}$$

e quelli della trasformata in $-\xi + 2$ sono $1 - 20 - 12 + 40 - 212$, che si rovesciano, poi si calcola la trasformata in $y + 2$

$$\begin{array}{r|l}
 & -212 + 40 - 12 - 20 + 1 \\
\hline
2 & -212 - 584 - 780 - 1580 - 3159 \\
 & -212 - 808 - 2396 - 6372 \\
 & -212 - 1232 - 4860 \\
 & -212 - 1656 \\
\hline
 & -212 - 552 - 540 - 236 - 59
\end{array}$$

dividendo per 3^4 e mutando η in 3η si hanno in fine i coefficienti della trasformata

$$-59\,\xi^4 - 236\,\xi^3\eta - 540\,\xi^2\eta^2 - 552\,\xi\eta^3 - 212\,\eta^4.$$

Se invece si fosse da prima eseguita la sostituzione $y = -\eta + 2x$, poscia la $x = \xi + 2\eta$, i calcoli sarebbero riusciti alquanto più brevi

$$\begin{array}{r|l}
 & -4 - 8 - 12 - 4 + 1 \\
\hline
-2 & -4 \quad 0 - 12 + 20 - 59 \\
 & -4 + 8 - 28 + 76 \\
 & -4 + 16 - 60 \\
 & -4 + 24
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & -59 + 76 - 60 + 24 - 4 \\
\hline
2 & -59 - 2 - 64 - 104 - 212 \\
 & -59 - 80 - 224 - 552 \\
 & -59 - 158 - 540 \\
 & -59 - 236
\end{array}$$

14. *Covarianti.* Oltre gli invarianti vi sono altre funzioni omogenee tanto rispetto ai coefficienti quanto rispetto alle indeterminate $x\ y$, le quali crescono nel rapporto di 1 a $\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}^{\mu}$ quando le indeterminate si cangiano nelle $\xi\ \eta$, ed ai coefficienti della forma $ax^n + nbx^{n-1}y +$ ec. si sostituiscono quelli della trasformata ottenuta colla sostituzione lineare $x = \alpha\xi + \beta\eta$, $y = \gamma\xi + \delta\eta$: a tali funzioni fu dato il nome di *covarianti*, e μ ne è l'*indice*. Continueremo a segnare con p il *grado* del covariante rispetto ai coefficienti a, b, ecc. della forma, ed m sarà il grado rispetto alle indeterminate, il quale dicesi l' *ordine* del covariante. Un termine di questo sarà per conseguenza $a_i a_{i'} \ldots x^{m-j} y^j$ gli a_i, $a_{i'} \ldots$ essendo p tra i coefficienti a, b, ... e propriamente quelli che nella data forma moltiplicano $x^{n-i} y^i$, $x^{n-i'} y^{i'}$, ... ;
ponendo $x = \alpha\xi$, $y = \eta$, il predetto termine diventerà $a_i \alpha^{n-i} a_{i'} \alpha^{n-i'} \ldots \xi^{m-j} \eta^j$,
e dovrà essere $= \alpha^{\mu} a_i a_{i'} \ldots (\alpha\xi)^{m-j} \eta^j$; dunque
$\mu = (n-i) + (n-i') \ldots - (m-j) = pn - i - i' \ldots - (m-j)$.
Se invece poniamo $x = \xi$, $y = \delta\eta$ vediamo nello stesso modo che dev' essere

$$a_i \delta^i a_{i'} \delta^{i'} \ldots \xi^{m-j} \eta^j = \delta^{\mu} a_i a_{i'} \ldots \xi^{m-j} (\delta\eta)^j$$

dunque $\mu = i + i' + \ldots - j$; paragonando questi due valori si vedrà che *l'indice* μ *di un covariante dipende dai suoi grado* p *ed ordine* m, *non che dal grado* n *della forma col mezzo della* $\mu = i + i \ldots - j = \frac{np-m}{2}$.

15. *Calcolo dei covarianti.* Noi segneremo con $\mathfrak{V}^{(p,m)}(u_n)$ o più semplicemente con $V_n^{(p,m)}$ il cova-

riante di grado y e di ordine m della forma u_n, e porremo

$$V_n^{(p,m)}=Ax^m+m\,Bx^{n-1}y+\frac{m(m-1)}{2}\,Cx^{m-2}y^2\ldots+Fy^m\,.$$

Vedemmo al § 4 che posto $x=\xi+\beta y$ i coefficienti $b, c,\ldots$ della u_n ricevono gli accrescimenti infinitesimi $a\beta, 2b\beta\ldots$, mentre x divenendo ξ diminuisce di βy, quindi l'invariabilità del covariante esige che sia

$$(a\mathrm{D}_b+2b\mathrm{D}_c\ldots+ng\,\mathrm{D}_h-y\,\mathrm{D}_x)\,V_n^{(p,m)}=0$$

cioè, colla caratteristica Δ allora usata, sarà

$$\Delta\,A.x^m+m\,\Delta\,B.x^{m-1}y+\text{ec.}=mAx^{m-1}y+$$
$$+m\,(m-1)\,Bx^{m-2}y^2+\text{ec.}$$

perciò $\Delta A=0$, $\Delta B=A$, $\Delta C=2B$, $\ldots\,\Delta F=mE$.

La prima di queste equazioni c'insegna che A, che noi segneremo con $v_n^{(p,m)}$, è un peninvariante (§ 9) (reso omogeneo mediante l'introduzione della a) d'indice μ e di grado p. I B, $C,\ldots$ potrebbero calcolarsi mediante la derivazione rispetto agli indici (§ 4) segnata con ∇; giacchè per l'euritmia si ha anche $mB=\nabla A$, $(m-1)\,C=\nabla B$, ec. Ma riuscirà più comodo dedurre mediante l'euritmia da tutti i termini contenuti in Ax^m tutti quelli contenuti in Fy^m, poscia calcolare $E,\ldots C, B$ col mezzo delle relazioni precedenti. Si noti peraltro che i termini di Fy^m potranno avere segni opposti a quelli di Ax^m, in tal caso il covariante potrà dirsi *semieuritmico*. — Il covariante di 1.° grado e dell'ordine n è sempre la stessa forma, cioè

$$\mathfrak{V}^{(1,n)}(u_n)=u_n\,.$$

16. *Esempii.* Pel covariante di secondo grado e di se-

condo ordine $V_3^{(2,2)} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ della forma cubica u_3 è $n=3$, $p=m=2$, $\mu=2$, nell'indice 2 abbiamo (§ 9) un solo peninvariante, che reso omogeneo è appunto di 2.° grado, noi lo segneremo con $v_3^{(2,2)}$ ed avremo $A=v_3^{(2,2)} = ac-b^2$; nella forma cubica l'euritmia permuta a con d, e b con c, perciò dal precedente A dedurremo

$C=bd-c^2$, poscia $2B = \Delta C = ad+3bc-4bc = ad-bc$, ed $A = \Delta B = \frac{1}{2}(3ac-ac-2b^2) = ac-b^2$ è il peninvariante da cui siamo partiti, quindi

$$V_3^{(2,2)} = (ac-b^2)x^2 + (ad-bc)xy + (bd-c^2)y^2$$

a cui può darsi la forma

$$V_3^{(2,2)} = \begin{vmatrix} ax+by\,, & bx+cy \\ bx+cy\,, & cx+dy \end{vmatrix}$$

e perciò (veggasi il § 79 della mia memoria sui determinanti) esso è l'Hessiano formato colle derivate parziali seconde della forma $u_3 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$. — Rispetto alla medesima forma se per primo coefficiente A di un altro covariante noi prendiamo il peninvariante

$$P_3 = a^2d - 3abc + 2b^3$$

(reso omogeneo mediante l'introduzione della a) abbiamo l'indice $\mu=3$ ed il grado $p=3$, perciò la $2\mu=np-m$ ci dà $m=3$ per l'ordine del covariante; il suo coefficiente D fatto euritmico al precedente

$v_3^{(3,3)} = a^2d - 3abc + 2b^3$ è $D = ad^2 - 3acd + 2c^3$, ma calcolando le formule $\Delta D=3C$, $\Delta C=2B$, $\Delta B=A$ si perviene ad A col segno cangiato, sicchè avremo il covariante *semieuritmico*

$$V_3^{(3,3)} = -(a^2d - 3abc + 2b^3)x^3 - 3(abd - 2ac^2 + b^2c)x^2y +$$
$$+ 3(acd - 2b^2d + bc^2)xy^2 + (ad^2 - 3bcd + 2c^3)y^3 .$$

— La forma cubica ammette altri covarianti, ci basterà indicarne il peninvariante $v_3^{(p,m)}$ che ne è il coefficiente del 1.° termine, giacchè mediante la derivazione Δ rispetto agli indici del suo euritmico si deducono tutti gli altri. Pel covariante di 4.° ordine soddisfaremo alla $2\mu = 3p - 4$ ponendo $p = 4$, $\mu = 4$; fra i due peninvarianti di indice 4 (§ 9) non possiamo adoperare che quello senza e, ed infatti

$$v_3^{(4,4)} = a^2c^2 - 2ab^2c + b^4 = P^2_2$$

ci dà un covariante euritmico. In simil modo si trova il covariante euritmico dato da

$$v_3^{(3,5)} = a^2c - ab^2 = aP_2$$

ed il semieuritmico dato da

$$v_3^{(4,6)} = -(a^3d - 3a^2bc + 2ab^3) = -aP_3 .$$

17. *Applicazione alla risoluzione dell'equazione cubica.* Se mediante le sostituzioni $x = \alpha\xi + \beta\eta$, $y = \gamma\xi + \delta\eta$ la forma cubica $u_3 = ax^3 +$ ec. dee ridursi alla binomia $a'\xi^3 + d'\eta^3$, il suo covariante Hessiano $V_3^{(2,2)}$, essendo $b' = c' = 0$, diventerà

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} (\alpha\xi + \beta\eta)^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (\alpha\xi + \beta\eta)(\gamma\xi + \delta\eta) +$$
$$+ \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix} (\gamma\xi + \delta\eta)^2 = a'd' \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2 \xi\eta ;$$

ponendo $\eta = 0$ si vede che il covariante $V_3^{(2,2)}$ dee annullarsi quando vi si pone $x = \alpha$, $y = \gamma$; così pure

esso si annullerà se $\xi = 0$, $x = \beta$, $y = \delta$. Dunque per ridurre u_3 a quella che dicesi la sua forma *canonica* $a'\xi^3 + d'\eta^3$ bisogna risolvere la

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \alpha^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \alpha + \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix} = 0 ,$$

che perciò fu detta l'equazione *canonisante*. Questa canonisante ossia equazione *risolvente* (§ 10) ha lo stesso discriminante della primitiva, giacchè

$$D_3 = 4 \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 .$$

18. *Altri covarianti.* Per la forma biquadratica la relazione $2\mu = 4p - m$ si può soddisfare con $m=2$, $p=2$, $\mu=3$, ma il peninvariante P_3 (§ 9) è di grado superiore a $p=2$. Nemmeno può essere $p=3$, $\mu=5$, perchè il peninvariante P_5 contiene il coefficiente f, che appartiene alla forma u_4, ed il peninvariante $P_2 P_3$ è di grado superiore a $p=3$. Abbiamo poi il covariante euritmico dato da

$$v_4^{(2,4)} = ac - b^2 = P_2$$

che è l' Hessiano della forma biquadratica. — Altri covarianti sono dati da $v_5^{(2,6)} = ac - b^2$

$$v_5^{(3,3)} = ace - b^2 e - ad^2 + 2bcd - c^3 = J$$

$$v_6^{(3,2)} = acg - b^2 g - 3adf + 3bcf + 2ae^2 - bde - 3c^2 e + 2cd^2$$

$$v_6^{(2,4)} = ae - 4bd + 3c^2 = I .$$

19. *Teoremi che danno dei covarianti.* Sono covarianti od invarianti non solamente gli Hessiani (§ 16), ossia i determinanti i cui 2^2 termini sono le derivate parziali-secon-

de (tali sono il discriminante D_2 ed i covarianti $V_3^{(2,2)}$, $V_4^{(2,4)}$, $V_5^{(2,6)}$); ma ancora i determinanti, i cui 3² termini sono le derivate parziali-quarte (tali sono l'invariante $J_4^{(3)} = J$, ed il covariante $V_5^{(3,3)}$); ed ancora i determinanti con 4² termini che sono le derivate seste (tale è l'invariante $J_6^{(4)}$), ecc. — Dati due covarianti di una medesima forma si può ottenerne un terzo mediante il determinante formato colle loro derivate-parziali-prime. Così per la forma cubica u_3, che è covariante di sè stessa, e che ha il covariante $V_3^{(2,2)}$, si ha

$$3 V_3^{(3,3)} = \mathrm{D}_x V_3^{(2,2)} . \mathrm{D}_y u - \mathrm{D}_y V_3^{(2,2)} . \mathrm{D}_x u .$$

20. Come da una forma si deduce un invariante, così viceversa da un invariante si deduce una nuova forma dello stesso grado della primitiva, e che ha una grande rassomiglianza con un covariante, differendone soltanto per la permutazione delle x, y nelle $y, -x$; questa nuova forma fu detta ***evettante***, e per l'invariante $J_n^{(p)}$ è data da

$$(x^n \mathrm{D}_a + x^{n-1} y \mathrm{D}_b + x^{n-2} y^2 \mathrm{D}_c \ldots + y^n \mathrm{D}_h) J_n^{(p)} .$$

Noi considereremo invece la forma

$$\mathfrak{E} J_n^{(p)} = (\pm x^n \mathrm{D}_h \mp x^{n-1} y \mathrm{D}_g \ldots - x y^{n-1} \mathrm{D}_b + y^n \mathrm{D}_a) J_n^{(p)}$$

la quale corrisponde col covariante $\mathfrak{V}^{(p-1, n)} u_n$; la caratteristica $\mathfrak{E}$ indica l'operazione espressa dalle ordinarie derivate D; così per esempio i discriminanti $D_3 = J_3^{(4)}$, $D_4 = I_4^{(6)}$ e gli altri invarianti $I = J_4^{(2)}$, $J = J_4^{(3)}$, ec. già considerati danno

$$\mathfrak{E} D_3 = -2 V_3^{(3,3)}, \quad \mathfrak{E} J_4^{(2)} = u_4 , \quad \mathfrak{E} J_4^{(3)} = V_4^{(2,4)}, \quad \mathfrak{E} D_4 = V_4^{(5,4)},$$
$$\mathfrak{E} J_5^{(4)} = 2 V_5^{(3,5)}, \quad \mathfrak{E} J_6^{(2)} = u_6 , \quad \mathfrak{E} J_6^{(4)} = V_6^{(3,6)}, \text{ ecc.}$$